VISIT…

LANZAROTE Caliente.COM

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

том **11** номер **8** год **1999**

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

ПРОСТРАНСТВЕННО ТРЕХМЕРНЫЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ УСКОРЕНИИ ПРОВОДЯЩИХ МАКРОТЕЛ

© *М.П. Галанин, А.П. Лотоцкий*[1)], *Ю.П. Попов, С.С. Храмцовский*

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН;
[1)] ТРИНИТИ

Работа выполнена частично при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 97-01-01016 и № 96-02-16842).

Разработаны и исследованы вычислительные алгоритмы для численного решения пространственно трехмерных задач электромагнитного ускорения проводящих тел. Построена модель, позволяющая рассчитывать явления в ускорителе путем решения трехмерной задачи в укороченной области, содержащей ускоряемый проводник. При этом нужно решить две специальные двумерные задачи для нахождения граничных данных на торцах укороченной трехмерной области. Тестовые расчеты показали, что такая модель дает надежные результаты. Полученные алгоритмы применены к исследованию явлений в ускорителе с обращенным токоподводом, картина протекания тока в котором намного сложнее, чем в обычном рельсотроне. Приведены качественные и количественные результаты моделирования.

THREE-DIMENSIONAL PHENOMENA AT ELECTROMAGNETIC LAUNCH OF CONDUCTING ARMATURES

M. Galanin, A. Lototski[1)], *Yu. Popov, S. Khramtsovski*

Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences;
[1)] TRINITI

The paper is aimed at the development, construction and implementation of numerical algorithms for electromagnetic launch process simulation. The object under consideration is the electromagnetic accelerator of railgun type for conducting armatures launch. The problem is three-dimensional and non-stationary in time. The model elaborated allows computing phenomena in the cut region while we have to solve two specific 2-D problems on lateral sides of the railgun aiming at determination boundary data. Test calculations show proper results. We constructed algorithms to study phenomena in the "muzzle-fed" railgun, which has complicated current flow. The quantitative and qualitative results of the modelling are presented.

Введение и постановка задачи

Настоящая работа посвящена исследованию процесса ускорения проводящих макротел в импульсных электродинамических ускорителях типа рельсотрон [1,2]. Простейшая электрическая схема и типичное сечение канала такого ускорителя показаны на рис.0.1. Ускоряющая сила в рельсотроне определяется величиной полного протекающего тока I и продольным градиентом индуктивности канала $L'=dL/dy$:

$$F_{уск} = L'I^2/2. \tag{0.1}$$

В натурных экспериментах [3] получено, что при скоростях разгона металлического якоря, превышающих 1,5 км/с, тепловыделение в зоне контакта якоря и рельса приводит к разогреву и испарению задней кромки якоря. Испарению проводящего вещества якоря способствует увеличение плотности тока из-за скоростного скинирования в задней части ускоряемого тела. При характерных для рельсотронов миллисекундных временах импульсов тока точки фазовых переходов в этой зоне с хорошей точностью соответствуют известным пороговым величинам интеграла от плотности тока $A=\int j^2 dt$ [4]. В упрощенных моделях процесса электродинамического ускорения [5] получены оценки критической скорости $V_{крит} \approx 0,9-1,2$ км/с, при которой происходит нарушение проводимости контакта металлического типа для различных материалов якоря и рельса. При этом использована двумерная модель протекания тока через якорь с рельсами, бесконечно протяженными по оси z, и ускоряющая сила из соотношения (0.1) с эмпирически определенным градиентом индуктивности. Однако для верного описания электродинамики ускорения и тепловых процессов в зоне контакта необходима замкнутая 3-х мерная нелинейная модель, объединяющая расчет распределения тока в якоре и локального тепловыделения с непосредственным расчетом объемной ускоряющей силы. Постановка задачи в целом определяется необходимостью исследования ускорителей типа рельсотрон с более сложной топологией якоря и канала, чем приведена на рис.0.1, в которых величина критической скорости могла бы быть увеличена в 2-3 раза относительно указанной выше. Эффект может быть достигнут, если удастся снизить максимальную плотность тока в контактной зоне. В случае успеха можно было бы обеспечить ресурс работоспособности канала ускорителя порядка 100 циклов, который необходим для практических приложений.

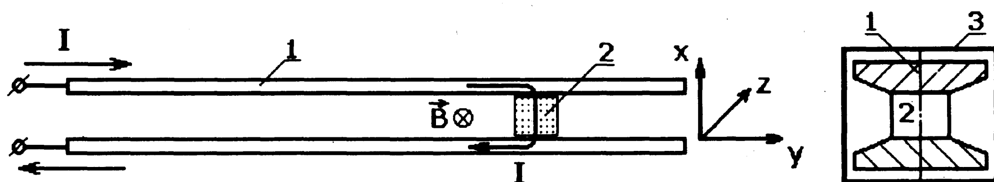


Рис.0.1. 1 – направляющий и токоподводящий рельс, 2 – ускоряемое тело (якорь или арматура), 3 – силовой бандаж канала.

Одним из вариантов такой модификации является использование якоря со стержневой токовой арматурой, показанного на рис.0.2а, а также канала с обратным токоподводом, схема и сечение которого представлено на рис.0.2б.

Предполагается, что при использовании такого ускорителя ток может быть распределен по развитой периферии контактов стержневой арматуры (выступающие концы которых показаны на рис.0.2а), а подвод тока в направлении, противоположном направлению движения,

существенно уменьшит влияние эффектов скоростного скинирования тока. Дополнительное техническое преимущество системы заключается также в наличии магнитного давления на направляющий рельс, улучшающего электрический контакт с якорем.

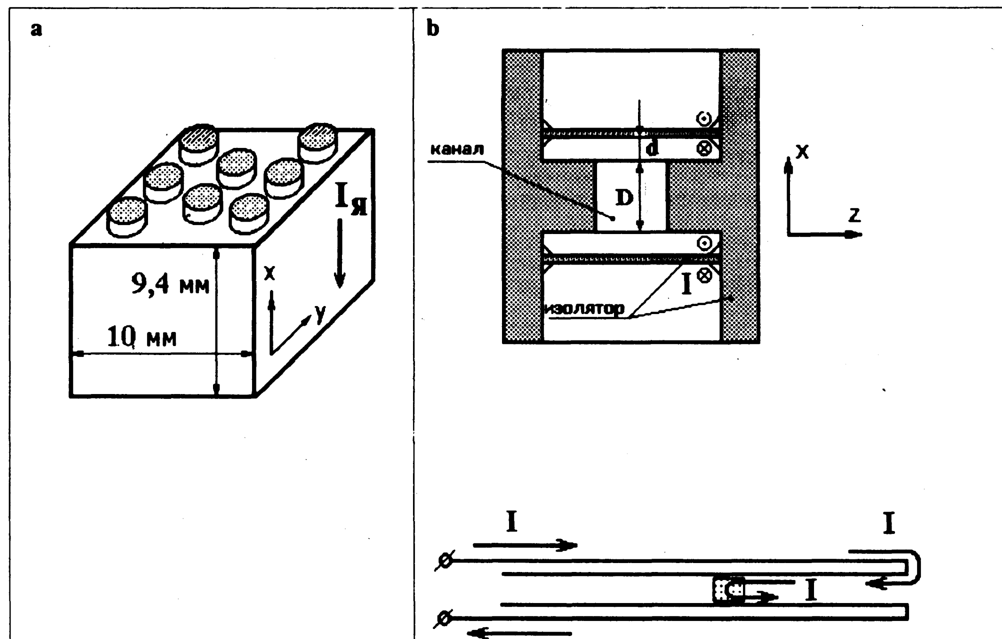


Рис.0.2. а – Якорь со стержневой токовой арматурой, b – схема и сечение канала с обратным токоподводом. Здесь D – калибр канала, d – толщина обратного токоподвода, осуществляющего механический и электрический контакт с якорем.

Рассмотрим некоторые особенности конфигурации магнитного поля и распределения тока в рельсотронном ускорителе.

В рельсотроне есть по крайней мере три характерных размера, отличающихся между собой. Длина l токоподводящих рельсов и их ширина h различаются на порядок величины. Кроме того, обычно ширина рельса в два-три раза превышает калибр якоря, замыкающего электрическую цепь. В силу последнего обстоятельства правильное вычисление поперечной компоненты плотности тока в контактной зоне при использовании двумерной модели невозможно даже в случае сплошного металлического якоря, не говоря уже о стержневой токовой арматуре, показанной на рис.0.2а. Вместе с тем определение плотности тока в якоре является важнейшей задачей при моделировании таких систем.

Для примера, качественно иллюстрирующего неправомерность двумерного подхода, рассмотрим ускорение тонкого стержня диаметром d^*, зажатого между рельсами конечной ширины h. Расположение стержня и рельсов при $h/d^*>>1$приведено на рис.0.3. Предполагая, что весь ток, протекающий по рельсу, собирается на задней границе стержня, можно легко рассчитать величину магнитного поля в системе и ускоряющую силу F. Результат расчета силы в зависимости от величины параметра h/d^* представлен на рис.0.4. Он показывает, что при $h>>d^*$ вычисленная величина F в несколько раз превышает ускоряющую силу, полученную из (0.1). При этом зона приложения силы сосредоточена вблизи точки контакта стержня с рельсом. При анализе такого расхождения результатов учтем, что выражение (0.1) соответствует закону сохранения энергии в деформируемом по оси y токовом контуре. Следовательно, выбранное произвольным образом распределение тока на рис.0.3, которое характерно для

двумерного представления, является неверным. Противоречие легко снимается, если увеличить угол α области подхода тока до 2π (см. рис.0.3). Тогда ток из направляющего рельса будет втекать в стержень по всему периметру, и значительная его часть будет входить в стержень со стороны, противоположной расположению источника тока. Эта часть тока, втекающая в стержень спереди, "нейтрализует" сильное магнитное поле вблизи точки контакта и компенсирует полученное в расчете превышение ускоряющей силы. Таким образом, двумерное моделирование электродинамики (и термодинамики) контактов якоря при ускорении в рельсотроне описывает качественную картину процессов, но оказывается непригодным для прогнозных расчетов поведения и характеристик реальных ускорителей макротел.

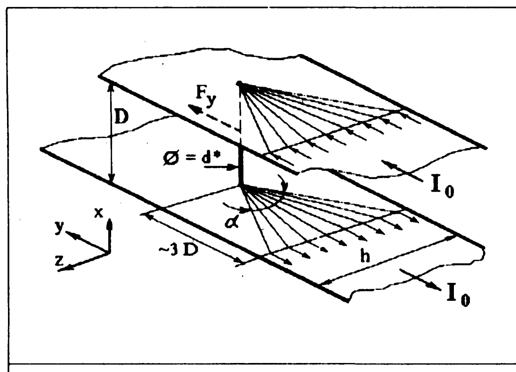


Рис.0.3. Стержень диаметром d^* с током в рельсах шириной $h \gg d^*$.

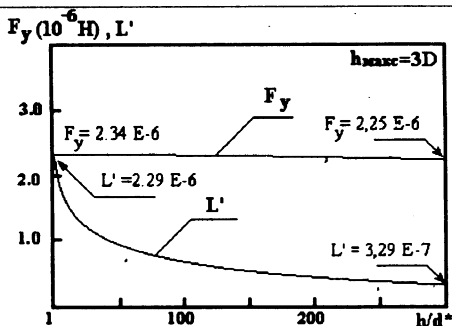


Рис.0.4. Рассчитанные зависимости ускоряющей силы F_y (для тока $I = \sqrt{2}A$, при этом сила(0.1) численно равна L' в Гн) и величины погонной индуктивности канала L' от относительной ширины h/d^* рельсов.

Перейдем к постановке задачи. Как показано выше, при ускорении тел в рельсотроне наиболее сложные и интересные явления происходят в близкой окрестности якоря, характерная протяженность которой сравнима с поперечным размером канала. Поэтому обычно при моделировании целесообразно ограничить рассматриваемую область и вести описание полей в пространственной области, жестко связанной со скользящим якорем. Длина этой области (в направлении оси y) составляет несколько калибров ускорителя в обе стороны от якоря. При таком подходе возникает проблема задания граничных условий на передней и задней границах исследуемой области. На боковых границах области этой проблемы нет, так как канал рельсотрона обычно заключен в проводящий (далее считаем идеально проводящий) силовой бандаж.

В [6] разработана модель для однородного (в пределах пространственных подобластей с различным типом электропроводности) описания электромагнитных полей в такой системе. При постановке задачи в [6] (см. также [7,8]) считалось, что на торцах пространственной области (движущейся вместе с якорем) задано тангенциальное магнитное поле, созданное бесконечно тонкими проводниками, присоединенными к центру направляющих. Количество таких проводников совпадало с количеством рельсов. По проводникам при этом протекал заданный ток. Такая модель позволяет обеспечить протекание заданного полного тока. Однако имеются явные недостатки такого приближения, и его несоответствие решаемой задаче очевидно. В частности, картина течения тока около границ по y в рассматриваемой области не соответствует картине, имеющейся в исходном ускорителе. Вместе с тем подобные краевые эффекты не должны заметно сказаться на процессах в малой окрестности якоря.

В [6-8] приведена серия результатов расчетов задачи, посвященная вычислению погонной индуктивности рельсотрона, как коэффициента пропорциональности между ускоряющей силой и половиной квадрата полного тока (см. (0.1)). Она показала, что с точностью до 2-3 знаков погонная индуктивность рельсотрона является величиной постоянной. Ее значение определяется лишь геометрией ускорителя, а не режимом ускорения. При этом рассматривалась простая конструкция ускорителя, аналогичная показанной на рис.0.1, а тепловые и электрофизические характеристики материалов полагались постоянными. Использована простая зависимость тока от времени с линейным фронтом и выходом на постоянное значение. Варьирование длины пространственной области, в которой решалась задача, позволило получить последовательность значений погонной индуктивности, быстро сходящуюся к некоторой величине. Причем для получения данной характеристики с точностью около 20 % оказалось достаточным рассматривать область с расстоянием 1-2 калибра от торца до якоря. Такое поведение погонной индуктивности дает возможность рассчитывать с помощью модели [6-8] значения интегральных характеристик ускорителя, т.е. положение и скорость якоря. Кроме того, это дает основание считать, что электромагнитные явления в якоре и его окрестности описываются в целом верно.

Однако для более сложных конструкций рельсотронов с увеличенным числом продольных токопроводов [9] результаты расчета могут отличаться от описанных, т.е. влияние искусственных граничных условий, несоответствующих физике процесса, будет существенным. Для конструирования ускорителей принципиально важно, как было показано выше, верное описание токов в якоре со сложной конфигурацией проводников. Необходимо разработать модель для более точного описания электромагнитных полей в ускорителе, соответствующего физике явления. Этому и посвящена настоящая работа.

В качестве базовой ускорительной системы в работе рассмотрен так называемый "muzzle-fed" канал (рис.0.2), подводящий ток к якорю со стороны дульного среза. В канале ускорителя четыре токопровода. По наружным токоподводам, создающим ускоряющее магнитное поле в канале, ток протекает до дульного среза, после чего поворачивает в обратном направлении и через направляющие контактные рельсы замыкается через якорь. Разработанный и представленный ниже алгоритм был применен для описания токопереноса в данном ускорителе со стержневым якорем, состоящим из 8 отдельных стержней квадратного сечения.

При разработке модели использовано резкое различие длины ускорителя (по y) и его поперечных размеров. Учтено также, что единственной заданной извне электромагнитной величиной можно считать полный ток, определяемый источником питания. Поэтому естественно рассмотреть модель, в которой на торцах расчетной области заданы тангенциальные компоненты магнитного поля, соответствующие бесконечно длинной (вдоль оси y) системе проводников, для каждого из которых задан полный ток. Это поле является решением соответствующей пространственно двумерной (в переменных (x, z) с рис.0.1) задачи. Решение же трехмерной задачи получается путем использования описанного в [6] алгоритма по заданным тангенциальным компонентам магнитного поля.

Ниже в §1 дан краткий анализ известных из [10-14] постановок подобных двумерных задач, в §2 представлена разработанная на их основе соответствующая модель, а в §3 проведено сравнение результатов ее применения с данными [6-8] на примере численного решения одной задачи. Сравнение свидетельствует о значительном преимуществе новой модели. В §4 описаны некоторые результаты моделирования рельсотрона с обращенным токоподводом, показавшие богатую картину распределения токов и полей. Последний параграф посвящен вопросу расчета погонной индуктивности рельсотронов.

§1. Различные модели для описания электромагнитных полей в системе бесконечно длинных проводников с заданным полным током

Приведем для дальнейших ссылок исходную систему уравнений Максвелла в квазистационарном приближении и некоторые ее преобразования (см. [10,6,7]):

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathrm{rot}([\mathbf{u} \times \mathbf{H}] - \mathbf{E}), \tag{1.1}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = 4\pi\sigma\mathbf{E} = 4\pi\mathbf{j}, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0.$$

Здесь и далее **E** и **H** – напряженности электрического (в системе координат, где вещество покоится) и магнитного полей, **B** – магнитная индукция, **j** – плотность тока, $\mathbf{r}=(x, y, z)$ – радиус-вектор, t – время, **u** – скорость движения вещества (в данном случае двигается лишь якорь и только по оси y), σ - электропроводность. Будем обозначать через $\mathbf{E}^*$ напряженность электрического поля в неподвижной системе координат: $\mathbf{E} = \mathbf{E}^* + [\mathbf{u} \times \mathbf{H}]$. Здесь и всюду ниже в формульных выражениях все величины даются в безразмерном виде (в частности, в (1.1) **H**=**B**). На рисунках и в данных физического характера переменные приведены в размерной форме.

При решении конкретной задачи вида [6-8] будем использовать симметрию области и наличие идеально проводящего кожуха по бокам. Для решения задачи в короткой пространственной области, жестко связанной с якорем и перемещающейся с ним по направлению y, введем смешанные эйлерово-лагранжевые (СЭЛ) переменные. Под ними понимаем начальные координаты данной движущейся области. Тогда $D/Dt=\partial/\partial t+(\mathbf{v},\nabla)$, где $\partial/\partial t$ – производная при фиксированных эйлеровых переменных, D/Dt – при фиксированных СЭЛ-переменных; v – скорость движения частиц данной области – будем считать равной скорости движения якоря.

Приведем задачу для определения полей внутри области после введения векторного потенциала **A** [6]:

$$\mathbf{H} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A},$$

$$\mathbf{E} = [\mathbf{u} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{A}] - \frac{D\mathbf{A}}{Dt} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}, \tag{1.2}$$

где **A** есть решение задачи:

$$4\pi\sigma\left\{[\mathbf{u} \times \mathrm{rot}\mathbf{A}] - \frac{D\mathbf{A}}{Dt} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{A}\right\} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A} - \theta(\sigma)\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{A}, \tag{1.3}$$

$$\mathbf{A}\big|_{t=0,\mathbf{r}\in G_1} = 0,$$

$$(\mathrm{rot}\mathbf{A})_\tau\big|_{r\in\Gamma_2} = \mathbf{\Psi}_\tau(\mathbf{r},t), \quad \mathbf{A}_\tau\big|_{\mathbf{r}\in\Gamma_1} = 0,$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A}\big|_{\mathbf{r}\in\gamma_{12}} = 0, \quad A_n\big|_{r\in\Gamma_{22}} = 0.$$

Здесь учтена неоднородность задачи по пространству: $\theta(\sigma)=0$ в G_1 и $\theta(\sigma)=1$ в G_2. В (1.3) и далее используем индексы τ для обозначения тангенциальной компоненты вектора, n – нормальной компоненты. $G=G_1 \cup G_2$, G – рассматриваемая область, $G_1=\{\mathbf{r}\in G\colon \sigma>0\}$, $G_2=\{\mathbf{r}\in G\colon \sigma=0\}$, ∂G_1 и ∂G_2 – границы G_1 и G_2 соответственно, $\partial G_{12}=\partial G_1 \cap \partial G_2$, Γ_1 – часть общей границы ∂G, на которой задано условие для $\mathbf{E}^*_\tau$ (то есть для $\mathbf{A}_\tau$), Γ_2 – часть ∂G, на которой задано условие для $\mathbf{H}_\tau$ (Ψ_τ – известная вектор-функция), $\partial G=\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_{12}=\Gamma_1 \cap \partial G_2$, $\Gamma_{22}=\Gamma_2 \cap \partial G_2$, $\gamma_{12}= =\partial G_{12} \cup \Gamma_{12}$.

Если в (1.3) вектор Ψ_τ известен, то решение **A** позволяет по (1.2) определить физические поля **H**, **E**. Основную проблему в рамках данной модели составляет определение вектора Ψ_τ на границах G.

В уравнениях (1.1)-(1.3) электропроводность зависит от **r** (различные материалы), t (движение проводников) и температуры (своя температурная зависимость для каждого материала). Для описания кинематики дополнительно к (1.1)-(1.3) решается уравнение движения якоря под действием силы Лоренца, определяемой обычным образом [6]. А для описания температуры дополнительно решается уравнение энергии обычного вида, в котором предусмотрена возможность фазовых переходов веществ (см. [6]).

Для решения полной пространственно трехмерной задачи рассмотрим предварительно следующую двумерную задачу. Пусть в области G имеется N проводников, по которым протекают заданные токи I_k, где $k \le N$. Будем использовать те же обозначения, что и в трехмерном случае: $G_1 = \bigcup_{k=1}^{N} S_k$, S_k – область, занимаемая k-м проводником (см. рис.1.1), ∂S_k – его боковая поверхность, $G_2 = G \setminus G_1$, область G может быть ограниченной или нет, что будет отмечаться при рассмотрении. Исследуем различные способы моделирования данной ситуации. Будем использовать систему координат вида рис.0.1, то есть точки G имеют координаты (x, z). Проводники считаем бесконечно длинными в направлении оси y.

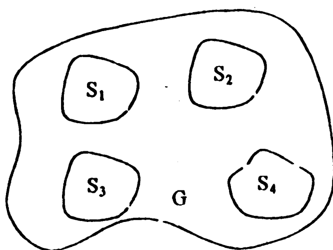


Рис.1.1. Схема пространственно двумерной области.

Естественно считать, что в данном случае электромагнитное поле имеет TE структуру, так как в двумерном случае исходная полная система уравнений Максвелла разделяется на две независимые системы [15, с. 203]. Поле TM не создает тока в направлении оси y, а тем самым оно тождественно равно нулю. В результате **E**=$\{0,E_y,0\}$, **H**=$\{H_x,0,H_z\}$, все производные по y в системе (1.1) для данного случая равны нулю. Движения проводников в рассматриваемой области, как и на торцах основной трехмерной области, нет (здесь **u**=0). В рассматриваемом случае система уравнений (1.1) записывается в виде:

$$4\pi\sigma E_y = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}, \qquad (1.4)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z}, \qquad \frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}.$$

Нас интересует решение (1.4), удовлетворяющее заданным начальным и граничным условиям и соответствующее протеканию по проводникам заданных токов I_k:

$$\int_{S_k} \sigma E_y dS = I_k\,, \qquad k = 1,2\ldots,N\,. \tag{1.5}$$

Пусть, например, начальные и граничные условия нулевые, как в основной задаче (1.3), описанной выше.

Напомним, что классическое решение задачи (1.4) с заданными начальными и граничными условиями, которое имеет непрерывные E_y, H_x, H_z при переходе через ∂S_k и интегрируемо с квадратом в G, определяется единственным образом в ограниченной области G (см. [10, 6]). Даже обращение σ в нуль в G_2 в отличие от трехмерного случая [6] не приводит к нарушению единственности определения E_y в G_2. Тем самым классическое решение задачи (1.4) с нулевыми начальными и граничными условиями (предполагается его существование) тождественно равно нулю и является единственным. Оно не может обеспечить выполнение условий (1.5), поэтому необходимо использование другой модели.

В [11, с. 211] для расчета электромагнитного поля в рассматриваемой системе при известных токах предлагается решать задачу:

$$\Delta A = 4\pi\sigma A_t - 4\pi\frac{I_k}{S_k}, \quad \vec{\mathbf{r}} \in S_k\,, \quad k=1,\,2,\ldots,N, \tag{1.6}$$

$$\Delta A = 0\,, \qquad \vec{\mathbf{r}} \in G_2$$

с нулевыми начальными данными и непрерывностью A при переходе через ∂S_k. В уравнении (1.6) S_k – значение площади поперечного сечения k-го проводника.

Уравнения (1.6) описывают y-ю компоненту векторного потенциала $\mathbf{A}=\{0,A,0\}$. После решения задачи (1.6) получаем компоненты физических полей $H_x = -\partial A/\partial z$, $H_z = \partial A/\partial x$. Отличие (1.6) от соответствующей данному варианту модели (1.3) заключается в наличии неоднородности в правой части, которая является следствием соотношения $E_y = -A_t + I_k/\sigma S_k$ в S_k. Тем самым (1.6) принимает в рассмотрение напряженность стороннего электрического поля, соответствующего протеканию равномерно распределенного заданного тока по данному проводнику.

В [16] на примере простых задач для одного цилиндрического проводника рассмотрено, способна ли модель (1.6) обеспечить протекание по проводнику заданного тока, то есть удовлетворить условию (1.5). В результате показано, что: 1) уравнения (1.6) обеспечивают в стационарном случае протекание по проводнику заданного тока при решении как в ограниченной, так и в неограниченной области G; 2) в нестационарном случае в ограниченной области решение задачи для (1.6) будет единственно; оно задает ток, определяемый параметрами задачи; 3) в случае неограниченной области и нестационарном случае решение той же задачи неединственно, протекающий ток определяется произвольным образом; 4) в последнем случае протекание нужного тока можно обеспечить, если потребовать дополнительно к обычным граничным условиям выполнения равенства

$$\int_{\partial S} \frac{\partial A}{\partial \rho} dl = -4\pi I\,, \tag{1.7}$$

являющегося аналогом (1.5) для данной ситуации (ρ – цилиндрическая переменная).

Отметим типичный способ решения описанной в [16] задачи (см. [17, 18]) для одного цилиндрического проводника, занимающего область S. Записывается система вида (1.6):

$$\Delta A = 4\pi\sigma A_t, \quad \mathbf{r} \in S,$$

$$\Delta A = 0, \quad \mathbf{r} \in G_2,$$

с условием (1.7). Она легко решается до конца. Однако этот способ применим лишь в случае неограниченной области, когда теоремы единственности нет. Для задачи в ограниченной области обеспечить выполнение граничных условий, вообще говоря, невозможно.

Отметим также постановку задачи [12, с. 140–142], являющуюся довольно распространенной. В [12] в общей системе проводников имеется выделенный проводник, по которому протекает ток с заданной плотностью. Решение можно получить и в данном случае. Однако полученная модель не является самосогласованной.

§2. Интегро-дифференциальная модель, ее свойства и особенности численной реализации

Результаты §1 свидетельствуют о том, что рассмотренные в нем модели не могут обеспечить протекание заданного тока. Уравнения (1.6) соответствуют по существу постановке задачи о воздействии на проводник однородно распределенного тока, заданного сторонним источником. Результирующий полный ток может отличаться от заданного.

Разработаем модель на основе уравнений (1.4), которая была бы свободна от указанных недостатков. Будем считать, что в начальный момент времени **H**=0 во всей области *G*. Пусть *G* ограничена, на ∂G задано условие $\mathbf{E}_\tau$=0. Классическое решение такой задачи единственно, тождественно равно нулю и не может удовлетворять условию (1.5). Откажемся от классических [10, 15] условий сопряжения на границах ∂S_k, предварительно их проанализировав.

Будем искать ограниченное решение задачи, электропроводность σ в *G* считаем также ограниченной. Тем самым, как и в [10], получаем, что на ∂S_k должно выполняться равенство $[\mathbf{H}_\tau]$=0, где $[\mathbf{H}_\tau] = \mathbf{H}|_\tau^e - \mathbf{H}|_\tau^i$ – скачок вектора при переходе через границу. Уравнение div **H**=0 дает требование $[\mathbf{H}_n]$=0 на ∂S_k. Тока в плоскости *G* нет, поэтому и условия на $[\mathbf{j}_n]$ на границах ∂S_k нет.

Необходимы уравнения, которые соответствовали бы возможности протекания постоянного ненулевого тока по проводнику при нулевых начальных данных. Тем самым нужно обеспечить возможность мгновенного скачка **H** до величины, которая бы дала нужную циркуляцию по ∂S_k. Такое поведение **H** дает неограниченную временную производную. И тем самым в рамках предположений [10,15] уже невозможно получить условие непрерывности E_y при переходе через ∂S_k. В то же время $\int \mathrm{grad} E_y\, dt$ в силу 2 и 3 уравнений (1.4) непрерывен при переходе через ∂S_k (в силу непрерывности **H**). Этим условиям можно удовлетворить, если допустить скачок E_y при переходе через ∂S_k на величину $\chi_k(t)$, подлежащую определению. Итого имеем условия на ∂S_k:

$$[\mathbf{H}] = 0, \left[E_y\right] = E_y^e - E_y^i = \chi_k(t), \quad \int\limits_{S_k} \mathbf{j}_y dS = \oint\limits_{\partial S_k} (\mathbf{H}_l, dl) = 4\pi I_k, \quad k = 1,\dots,N. \tag{2.1}$$

Величина χ_k играет роль плотности поверхностных магнитных токов [11]. В этом случае для энергии электромагнитного поля имеем соотношение:

$$\int\limits_G \left[\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(H_x^2+H_y^2\right)+\sigma E_y^2\right]dxdy=\sum_{k=1}^{N}4\pi\int\limits_{\partial S_k}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]_n dl_n=\sum_{k=1}^{N}4\pi I_k\chi_k(t),$$

при этом интеграл по верхней границе обнуляется в силу граничных условий. Из полученного тождества сразу получаем тривиальность решения однородной задачи (т.е. задачи при нулевых токах): $H_x=H_y=0$ в G, $E_y=0$ в G_1 и $E_y=\chi_0(t)=\chi_k(t)$, $k=1,2,...,N$ в G_2. Однако граничные условия на ∂G обеспечивают $\chi_0(t)=0$. А это означает единственность решения.

Единственность решения в неограниченной области может быть обеспечена лишь для решения, имеющего заданную извне зависимость логарифмического слагаемого. Тогда добавка к нему, удовлетворяющая условию $\lim\limits_{\rho\to\infty}\oint\limits_{\partial G}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]_n\, dl_n=0$, определяется однозначно.

Введем векторный потенциал $\mathbf{A}=\{0, A, 0\}$, как в (1.2). Ограниченность $\mathbf{H}$ сразу ведет к условию непрерывности $\mathbf{A}$ при переходе через ∂S_k. Отсюда следует, что для обеспечения скачка (2.1) необходимо взять $E_y=-\dfrac{\partial A}{\partial t}-\chi_k(t)$ внутри S_k. А последнее условие (2.1) дает

$$\chi_k(t)=\left(-\int\limits_{S_k}\sigma\frac{\partial A}{\partial t}dS-I_k\right)\Bigg/\int\limits_{S_k}\sigma dS. \tag{2.2}$$

В результате вместо системы вида (1.3), соответствующей рассматриваемой ситуации, или (1.6) имеем

$$4\pi\sigma\left[\frac{\partial A}{\partial t}-\left(\int\limits_{S_k}\sigma\frac{\partial A}{\partial t}dS+I_k\right)\Bigg/\int\limits_{S_k}\sigma dS\right]=\Delta A \quad \text{в} \quad S_k,\ k=1,2,...,N, \tag{2.3}$$

$$\Delta A=0 \quad \text{в} \quad G_2,$$

с условиями

$$A\big|_{t=0}=0, [A]=0 \quad \text{на} \quad \partial S_k,\ A\big|_{\partial G}=0, \tag{2.4}$$

то есть нулевыми начальными данными, непрерывностью A на ∂S_k и нулевыми граничными условиями для случая области G, ограниченной идеально проводящим кожухом. Левая часть первого уравнения (2.3) представляет из себя $-4\pi j_y$, откуда сразу получаем, что решение (2.3) удовлетворяет последнему условию (2.1), то есть обеспечивает протекание заданного тока.

Отметим, что модель (2.3) для частного случая постоянного σ без какого-либо обоснования и исследования используется в [13,14], где считается, что $\chi_k(t)$ "описывает напряженность приложенного электрического поля". Это не совсем так, что показано выше, но сути дела не меняет.

Рассмотрим вопрос о единственности решения задачи (2.3), (2.4) в предположении его существования. Пусть для простоты σ не зависит от t. Тогда, предположив существование двух решений, для их разности имеем тождество

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial}{\partial t}\int_{S_k}\sigma\left(A-\int_{S_k}\sigma A dS\Big/\int_{S_k}\sigma dS\right)^2 dS+\int_G(\mathrm{grad}A)^2 dS=0. \quad (2.5)$$

Отсюда получаем, что A есть функция времени, равная нулю при t=0. Но она и тождественно равна нулю в силу граничных условий (2.4).

При решении задачи для (2.3) в неограниченной области тождества (2.5) нет, возникают те же проблемы, что и в [16] (см. §1)). Единственность решения может быть обеспечена выделением той его части, которая неограниченно растет на бесконечности (именно так по существу и поступают в [13,14]). Отметим, что и в случае неединственности каждое решение задачи будет обеспечивать заданный ток.

Задача (2.3), (2.4) содержит интегро-дифференциальное уравнение. Конечно-разностная дискретизация и левых, и правых частей не составляет трудностей и делается так же, как и ранее [6-8]. Учет же интегрального члена составляет особенность данной задачи.

В первых расчетах производились попытки итерационного учета интегрального члена. При этом система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для новой итерации решения на следующем временном слое является самосопряженной, ее решение находится как и ранее и проблем не составляет. Итерации формально сходились, обеспечивая всегда протекание нужного тока, но, как оказалось, действительной сходимости решения не было. Это связано с организацией итерационного процесса через интегральный член, содержащий временную производную.

Правильные результаты дает следующий прием. Расширим число неизвестных разностной задачи на N, равное количеству проводников в двумерной области. Пусть при этом (здесь τ – временной шаг разностной схемы)

$$Y_k=\sqrt{\frac{8\pi}{\tau}}\frac{\tau}{2}\cdot\left\{\int_{S_k}\sigma\frac{\partial A}{\partial t}dS+I_k\right\}\Big/\left(\int_{S_k}\sigma dS\right)^{1/2},$$

$$4\pi\sigma\frac{\partial A}{\partial t}-\sqrt{\frac{8\pi}{\tau}}\cdot\sigma Y_k\Big/\left(\int_{S_k}\sigma dS\right)^{1/2}=\Delta A \quad \text{в} \quad S_k,\quad k=1,2,\ldots N. \quad (2.6)$$

Видно, что (2.6) отличается лишь обозначениями от (2.3). Но (2.6) уже после интегрирования уравнения для A по двумерной сеточной ячейке дает самосопряженную СЛАУ для значений векторного потенциала плюс N величин Y_k. Коэффициент $\tau/2$ в (2.6) выделен для того, чтобы сократиться с $2/\tau$: $A_t=(\hat{A}-A)/\tau=2\left(A^{(0.5)}-A\right)/\tau$, так как уравнения берутся с временным весом (0.5). При решении СЛАУ находится $A^{(0,5)}$ и новые Y_k. Метод (2.6) симметризации СЛАУ позволяет без проблем находить решение разностной задачи.

Как указывалось во Введении, задача (2.3), (2.4) является лишь вспомогательной при решении трехмерных задач. При этом решение (2.3) (или (2.6)) позволяет найти **H** на границе, которое дает необходимое граничное условие Ψ_τ в (1.3). Решение же (1.3) позволяет найти интересующие нас пространственно трехмерные поля **H**, **E**, T и т.д. Задача (1.3) ре-

шается теми же методами, что и ранее (см. [6]). Отметим, что в случае рельсотрона необходимо решать задачи вида (2.3), (2.6) на обоих торцах рассматриваемой области.

Решение уравнения энергии, опущенного при выписывании модели, проводится как и в [6]. Для решения задачи Стефана в [6] и здесь использовался однородный метод [19].

§ 3. Сравнение различных алгоритмов решения пространственно трехмерных задач

В соответствии с Введением рассмотрим еще раз задачу определения погонной индуктивности, которая уже решалась в [6–8]. При этом изучался рельсотрон простейшей конструкции, изображенной на рис.0.1. Подробно геометрические характеристики, электро- и теплофизические данные материалов приведены в [6–8] и здесь повторяться не будут. Отметим лишь различия вариантов расчета между собой.

Вариант 1 (опорный расчет): в нем область численного решения по y отстояла от якоря на 0.165 влево и 0.165 вправо (по 1.65 калибра ствола); бралось число ячеек по x – (4+4+3)=9, по y – (5+5+3)=13, по z – (4+5)=9. Запись в виде сумм соответствует числу ячеек по различным подобластям ускорителя. Приведены безразмерные длины участков.

Вариант 2: отличие от 1 состоит в более густой сетке, то есть по x – (6+6+3)=15, по y – (5+8+3)=16, по z – (6+5)=11.

Вариант 3: отличие от 1 состоит в размере G налево от якоря, равном 0.33 и сетке (10+5+3)=18 в направлении оси y.

Вариант 3а: отличие от варианта 3 состоит в увеличении размера G направо от якоря, ставшего равным 0.33, и сетке (10+5+7)=22 в направлении y. Такого варианта в работах [6–8] не было.

Вариант 4: аналогично 1, 3, область G составляет 0.495 влево от якоря по y, сетка (15+5+3)=23 по этой оси.

Вариант 5: аналогично 1, 3, 4, граница G по y отстоит на 0.66 влево от якоря, число ячеек (20+5+3)=28 в направлении оси y.

Расчет данных вариантов в [6–8] проводился с целью проверки использованной физической модели ускорителя, в которой задача решалась в короткой (по y) пространственной области. На граничных по оси y торцах задавалось тангенциальное магнитное поле бесконечно длинного и тонкого прямолинейного проводника. С увеличением расстояния от якоря влияние граничных условий должно ослабевать, что должно выражаться в выходе погонной индуктивности на некоторое постоянное значение. Так и произошло. Развитые в данной работе граничные условия значительно ближе к действительности. Поэтому можно рассчитывать, что решение задачи с данными граничными условиями будет давать значения погонной индуктивности, значительно быстрее сходящиеся к той же постоянной.

При просчете данных вариантов как в [6–8], так и здесь, не ставилось целью получить наиболее точные и надежные значения коэффициента между ускоряющей силой и половиной квадрата полного тока. Интерес представляла лишь зависимость получаемого параметра от выбираемой расчетной области и наиболее грубых характеристик сетки. Отсюда и столь редкая пространственная сетка, а также короткая длина расчетной области.

Опишем сравнительно подробно лишь опорный расчет. В нем область G покрыта разностной сеткой размерами 11×13×9. При этом получено 1287 ячеек для температуры, 5040 ребер для компонентов **A**, 4220 граней для компонентов **H**. После исключения ребер, относящихся к Γ_1, в СЛАУ осталось 3546 неизвестных (в [7] – 3499); хранимая матрица СЛАУ для определения **A** содержала 14759 ненулевых элементов (ранее – 14523). По сравнению с [6-8] добавилось 2 вспомогательных задачи для 2*(120+1)=242 неизвестных, из которых 120 – граничные компоненты A_y на двух границах и двух проводниках. Матрица для решения одной

вспомогательной задачи на границе содержала 295 ненулевых элементов. Матрицы хранились в так называемом "йельском" формате своей одной треугольной частью.

В процессе численного решения контролировались значения divA в G_2, divj в G_1, соответствие втекающего и вытекающего токов. В расчетах токи совпадали с более высокой точностью, чем в [6-8] (как правило, около $5 \cdot 10^{-3}$ относительной точности).

В приведенной ниже таблице 1 показаны значения погонной индуктивности для случая использования старых граничных условий [6-8] (первая строка) и значения, рассчитанные для граничных условий данной работы. В проведенных расчетах ток линейно по времени до t=0.2 рос от нуля до некоторой величины, оставаясь далее постоянным. Все данные таблицы соответствуют одному моменту времени t=0.27.

Таблица 1. Погонная индуктивность

Вариант	1	2	3	3а	4	5	Относительная разность
1	2.57	2.6	3.1	Нет	3.25	3.28	21.6%
2	2.88	2.92	3.19	3.15	3.27	3.30	12.7%

В последней колонке показана относительная разность значений в 1-й и 5-й колонках (делится на значение в 5-й). Ясно видно, что граничные условия, полученные в данной работе, намного лучше соответствуют предположению о бесконечно длинных рельсах, чем старый вариант граничных условий.

§ 4. Моделирование ускорителя с обратным токоподводом

Рассмотрим электродинамический ускоритель с обратным токоподводом, схема которого приведена на рис. 0.2. Он отличается от простейшей конструкции рис. 0.1 прежде всего наличием двух пар токопроводов, расположенных друг над другом. По верхнему рельсу ток течет от начала ускорителя до его выхода, где поворачивает в обратную сторону и втекает в ускоряемое тело с передней (по направлению движения) стороны. При этом какая-то доля тока замыкается и через хвостовую часть. Подробнее физико-технические детали такого ускорителя описаны в [9,20]. Напомним, что одной из основных проблем в конструировании электродинамических ускорителей является борьба со скоростным скин-слоем, суть которого состоит в концентрации тока на задней кромке контакта рельса и ускоряемого проводящего тела. Рост скорости ведет к увеличению плотности тока в этой зоне, плавлению и последующему испарению материала якоря. При этом металлический электрический контакт переходит в плазменный, чему сопутствуют эрозия канала и падение эффективности ускорения. Предполагается с помощью обратного токоподвода расширить область перетекания тока в якорь и увеличить скорость, при которой начинается испарение материала якоря.

Рис. 4.1 поясняет картину перетекания тока в ускорителе в случае использования якоря, показанного на рис. 0.2. Якорь состоит из 8 токопроводящих стержней (показано сечение, проходящее через 3 крайние), пространство между которыми заполнено диэлектриком. Целью моделирования является детальное исследование характера распределения тока якоря и изучение зависимости характеристик ускорителя с обратным токоподводом от параметров конструкции.

Как и ранее, при моделировании будем рассматривать не весь ускоритель, а лишь его часть, которая перемещается по каналу вместе с ускоряемым телом. Наличие нескольких участков токоподвода делает особенно актуальной задачу аккуратной постановки граничных

условий на торцах рассматриваемой области. Для их задания использован описанный выше алгоритм.

Численное моделирование показало, что ток протекает по внутренним поверхностям токовой петли, образованной щелью между прямым и обратным токопроводами. В результате для замыкания через якорь ток должен перетечь с внутренней поверхности этой петли на контактную поверхность обратного токопровода-рельса, обращенную к ускорительному каналу. Перетекание осуществляется как по боковым поверхностям токопровода, так и путем диффузии тока через токопровод. Течение является существенно трехмерным. Перетекание тока по поверхности ведет к попаданию значительной доли тока не в переднюю, а заднюю по ходу движения часть якоря.

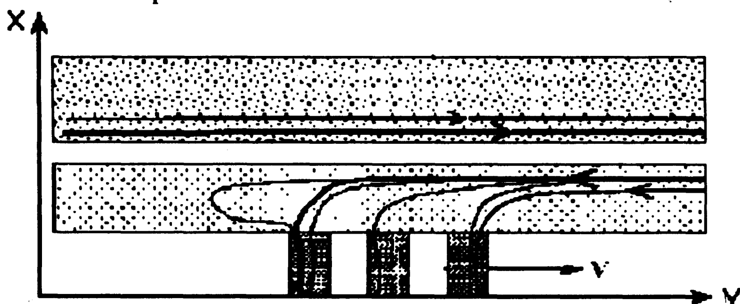


Рис.4.1. Картина течения токов в рельсотроне с обратным токоподводом.

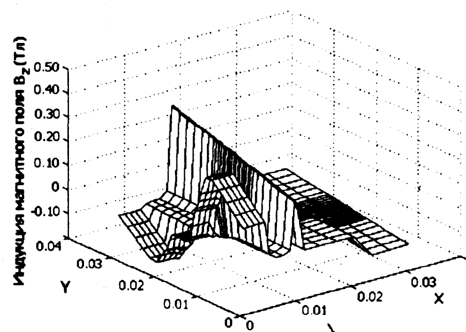
Типичное распределение индукции магнитного поля в плоскости сечения z=const, проходящего по каналу ускорителя через 2 средних стержня (см. рис.0.2), показано на рис. 4.2 при полном токе ускорителя I=10 кА. На рис.4.2a показана компонента B_z, ортогональная направлению движения. Хорошо видно присутствие сильного магнитного поля впереди ускоряемого тела. Это поле ведет к уменьшению ускоряющей силы по сравнению с рельсотроном обычной конструкции. Значительное поле присутствует между двумя направляющими. Здесь наличие поля ведет к появлению дополнительного магнитного давления, поджимающего нижний рельс к якорю и улучшающего электрический контакт. Рис.4.2b и 4.2c показывают, соответственно, распределения компонент B_y и B_x в том же сечении. Два отрицательных экстремума на рис.4.2b соответствуют полю от x-й компоненты плотности тока, протекающей через крайние (по y и z) стержни, являющейся максимальной в якоре. Две пары экстремумов на рис.4.2c для B_x соответствуют подтекающим к стержням по нижней поверхности рельсов y-й компоненте плотности тока и z-й компоненте того же вектора (отрицательной по величине). Рисунки показывают существенную разницу амплитуд компонент. Максимальные значения соответствуют рис.4.2a. На рис.4.2d показано распределение продольной (вдоль стержней) компоненты плотности тока в сечении x=const, лежащем вблизи плоскости симметрии x=0. Уже данный рисунок показывает, что большая часть тока проводится первой (по стволу и направлению движения) парой стержней.

Интересно отметить некоторые особенности результатов предварительных численных экспериментов, полученных при моделировании ускорения стержневого якоря в рельсотроне с обратным токоподводом.

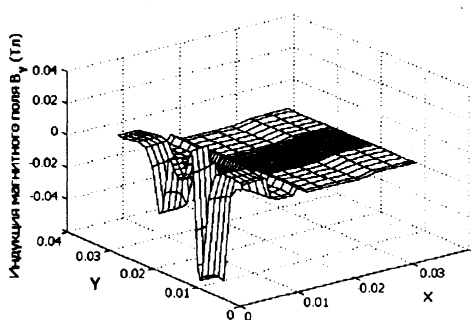
Магнитное поле B_z перед якорем и позади него на рис.4.2 создается как токами, протекающими через стержни якоря, так и токами обоих токоподводов. При этом, поскольку собственное поле токов якоря не участвует в формировании ускоряющей силы, тормозящее поле B_z от токоподводов можно оценивать по величине на передней границе области, в которой ищется решение. На рис.4.2 видно, что величина B_z там мала по сравнению с аналогичной величиной на задней границе. Тем не менее распределения полей на передней и задней (по y)

границах области меняются со временем из-за диффузии магнитного поля (и токов) в тело токопроводов.

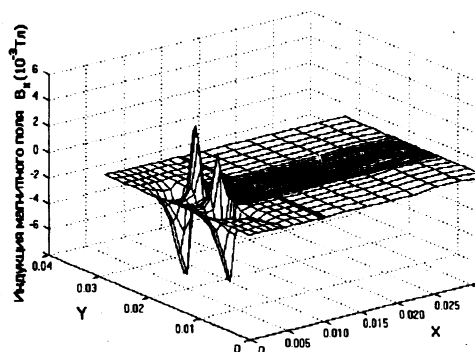
Это приводит к изменению во времени ускоряющей силы *F*, действующей на якорь, которая в данных расчетах определялась интегрированием величины **B**×**j** по области якоря. Характерно, что для обычной конфигурации канала рельсотрона эффективная величина погонной индуктивности *L'*, входящая в выражение для силы (0.1), несколько увеличивалась со временем, в то время как *L'* для канала с обращенным токоподводом, наоборот, уменьшалась. Последнее обстоятельство можно объяснить увеличением магнитного потока между прямым и обратным токоподводами за счет диффузии поля и соответствующим увеличением индукции магнитного поля перед якорем. Изменение размера области трехмерного счета от 1 до 2 калибров вперед и назад от якоря практически не влияло на результат расчетов.



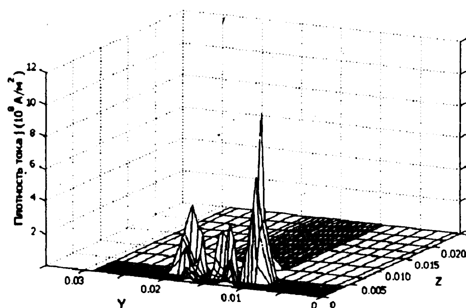
A



B



C



D

Рис.4.2. Распределения компонент вектора магнитной индукции и плотности тока

Один из самых интересных результатов моделирования – это полученные распределения тока между стержневыми проводниками якоря. Для канала с обратным токоподводом их зависимости от времени в интервале от начального момента до *t*=0,5 мс приведены в виде графиков 1-5 на рис.4.3. Графики 1, 3 и 5 соответствуют парным стержням - токопроводам на рис. 0.2, имеющим одинаковую координату *y*, а графики 2 и 4 – одиночным стержням, расположенным в средней плоскости якоря. Отсчет нумерации идет с задней по ходу движения стороны якоря. Аналогичные зависимости для токов стержней якоря в обычном канале приведены на рис.4.4. Их сравнение показывает, что, несмотря на близкое соотношение токов в

начале процесса, в канале с обратным токоподводом ток к моменту времени t=0,3 мс практически равномерно распределен по всем проводникам. В обычном канале отношение между токами в стержнях слабо меняется с течением временем и составляет от 2,5 до 10. Таким образом, судя по данной характеристике, исходные предпосылки о целесообразности использования канала с обратным подводом тока оказались оправданы.

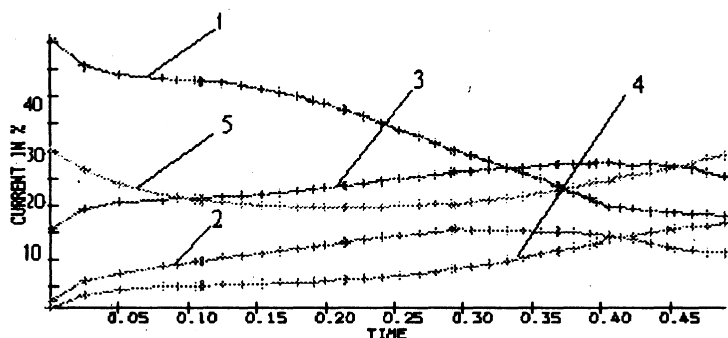


Рис.4.3. Распределение тока между стержневыми проводниками для рельсотрона с обратным токоподводом.

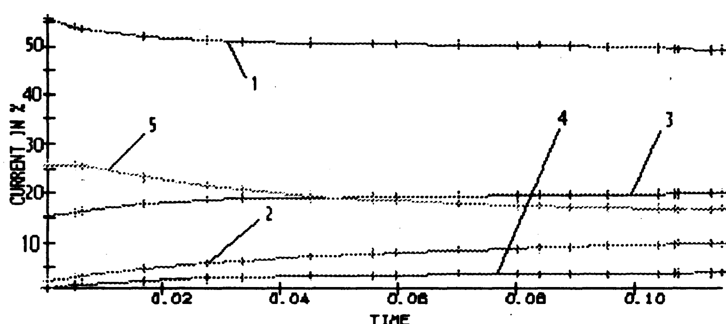


Рис.4.4. Распределение тока между стержневыми проводниками для рельсотрона обычной конструкции.

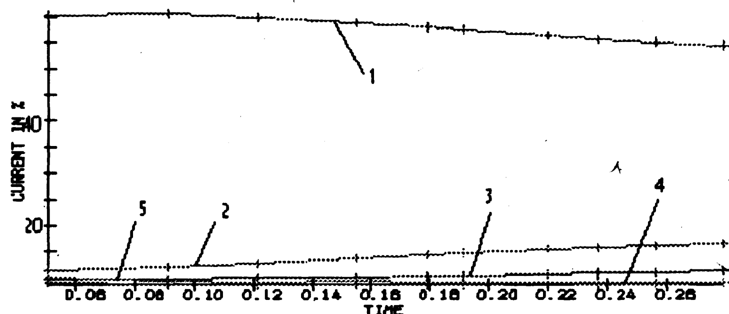


Рис.4.5. Распределение тока в случае сплошного якоря (верх).

На рис. 4.5 показано рассчитанное распределение токов по разным зонам сплошного якоря, выполненного в виде проводящего параллелепипеда. Рассмотрено сечение, прилегающее к плоскости токоподводящего рельса. Якорь ускоряется в обычном канале. Разбиение на 5 зон по длине якоря аналогично расположению 5 групп стержней, рассмотренных выше. Здесь можно видеть, что в течение всего исследуемого промежутка времени более половины полного тока сконцентрировано на задней границе якоря, что должно приводить к более высокой плотности тока, чем для якоря со стержневой токовой арматурой. Для полноты картины на рис.4.6 приведено распределение тока в этом же якоре в средней плоскости между рельсами. Здесь ток со временем стремится к равномерному распределению по зонам, однако это обычная диффузия поля, отличная от ярко выраженного эффекта скоростного скинирования тока на контактной поверхности.

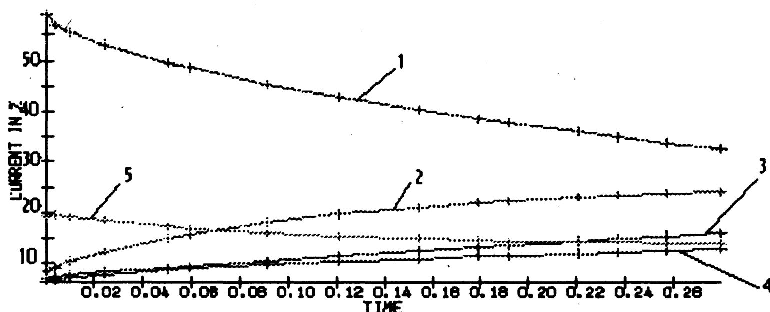


Рис.4.6. Распределение тока в случае сплошного якоря (середина).

В данной работе не ставилась цель исследования зависимости критической скорости от различных характеристик. Все расчеты выполнялись с начальной скоростью тела, равной 0.9 км/сек и близкой критической скорости для обычной ситуации [5,6,9]. Поэтому во всех достаточно протяженных по времени расчетах достигалась критическая скорость, т.е. начиналось плавление и кипение материала якоря. Здесь также наблюдается существенное различие пространственно трехмерных и двумерных расчетов. В случае трехмерного моделирования зависимость максимальной по пространству температуры от времени имеет полочку при достижении ею температуры кипения. Так, например, для варианта с прямым токоподводом она тянется от t=0.13 мс до t=0.16 мс. Наличие полочки объясняется течением тока по задней стороне якоря. Первой начинает плавиться угловая точка. При этом увеличивается сопротивление данного участка. В результате ток начинает перераспределяться вдоль задней кромки якоря, что ведет к плавлению следующего участка и т.д. Это происходит до начала плавления всей задней кромки якоря, после чего уже температура начинает повышаться далее. В пространственно двумерных расчетах, описанных, например, в [6], такой участок не наблюдался в соответствии с использованным приближением, в котором все точки задней кромки являлись равноправными и начинали плавиться одновременно.

Таким образом, предварительные результаты расчетов показали достаточно сложную картину распределения электромагнитных и тепловых полей в реальном трехмерном ускорителе с обратным токоподводом.

§ 5. Расчеты погонной индуктивности рельсотронов

Погонная индуктивность L' канала ускорителя является одним из основных параметров, характеризующих его работу. Полученные нами данные показывают ее заметное уменьшение в канале с обратным токоподводом до величины $L'=(1,4\div1,2)\cdot10^{-7}$ Гн/м при толщине обратно-

го токоподвода d=(1÷5)·10^{-3}м. Однако и рассчитанные величины L' для обычного канала оказываются также меньшими, чем значения "потоковой" погонной индуктивности L_p, которые получаются в соответствии с известными электротехническими формулами и таблицами [21] по потоку магнитного поля. Выяснению причин полученных расхождений был посвящен цикл расчетов, результаты которого представлены в данном параграфе. При этом рассматривался лишь вариант с прямым подводом тока.

В качестве основного варианта был выбран случай ускорителя с нижним рельсом толщиной $d=10^{-3}$ м. Данные [21] показывают, что в этом случае L_p=2.83·10^{-7} Гн/м, где L_p есть "истинная" погонная индуктивность ускорителя, полученная путем деления потока магнитного поля через рамку единичной длины (в направлении y) на протекающий ток. При этом берется магнитное поле на границе пространственной области, соответствующее бесконечно протяженным направляющим, т.е. полученное в пространственно двумерном приближении, как на рис.1.1. Данные [21] получены в рамках геометрического подхода, в котором по существу не учитывается истинное распределение тока по сечению проводника. Ток считается либо сосредоточенным на поверхности (высокочастотное приближение), либо распределенным равномерно по сечению (низкочастотное приближение). Нас интересует первое из них, так как в этом случае весь магнитный поток пронизывает ускорительный канал и участвует в совершении работы по ускорению якоря. Несмотря на указанные приближения, данные [21] с высокой точностью описывают величину погонной индуктивности реальных электротехнических устройств.

Приведенные значения L' получены для данного варианта в случае пространственной области, в которой от границ расчетной зоны до якоря отложено по одному калибру. Увеличение длины области ведет к очень слабому, практически незаметному, росту L'. Аналогичный результат получен при изменении формы токовой кривой, которая вместо синусоидальной была взята в виде линейно возрастающей с выходом на постоянное значение. Также практически незаметно влияние числа точек пространственной сетки на получаемые значения ускоряющей силы.

Наиболее сильным оказалось влияние различных проводников, экранирующих действие протекающего тока (см. также [22]). Например, уменьшение в конструкции рис.0.2 зазора между прямым и обратным токоподводами до 0 (или заполнение пространства между ними проводником), дает увеличение значения L' от 1.45·10^{-7} до 1.7·10^{-7} Гн/м на временном промежутке до t=0,3 мс. Ликвидация перемычки и верхнего рельса увеличивает L' до (2.12÷2.36)·10^{-7} Гн/м на том же интервале изменения t. Интересно, что значение L_p, вычисленное в соответствии с [21,10] через поток магнитного поля на границе рассматриваемой области, оказалось равным 2.52·10^{-7} Гн/м, что также заметно отличается от приведенной величины 2,83·10^{-7} Гн/м. Близкое значение L_p было получено после увеличения вдвое расстояния от краев направляющих до внешнего идеально проводящего кожуха, т.е. значительного уменьшения экранирующего действия внешнего кожуха.

Попутно было сделано следующее наблюдение. В [6] построена конечноразностная схема для решения задач электродинамического ускорения проводящих тел. Она является полностью консервативной [23], т.е. описывает энергетические соотношения так же, как и исходная дифференциальная модель. Возникшее вследствие использования направленной разности в конвективном слагаемом (ведущее к несимметричному использованию сеточной функции в векторном произведении $[\mathbf{u}\times\mathbf{H}]$) рассогласование учтено в ускоряющей силе. Однако практика расчетов [6-8] показала, что при движении пространственной области, на границе которой заданы тангенциальные компоненты напряженности магнитного поля, разностный дисбаланс может существенно превышать работу силы Лоренца, рассчитанную обычным образом. Происходит это вследствие экспоненциального уменьшения напряженности магнит-

ного поля **H** около границы. Достаточно грубая пространственная сетка, использованная в цитируемых расчетах, не позволяла описать резкий спад **H** около границы. Поэтому расчеты [6-8] выполнены без учета дисбаланса чисто разностного происхождения. Описанные выше результаты, включая и предыдущие параграфы, также получены без учета требования полной консервативности. Разработанные граничные условия позволяют избежать задания тангенциальных компонент **H** и, тем самым, их экспоненциального уменьшения. В результате применения указанных условий разностный дисбаланс оказался существенно меньше работы силы Лоренца. Его учет позволяет добиться полной консервативности и несколько увеличить параметр L'. Так, учет дисбаланса при прочих равных условия позволил увеличить интервал изменения L' от $(1.99 \div 2.37)\cdot 10^{-7}$ Гн/м до $(2.26 \div 2.47)\cdot 10^{-7}$ Гн/м. Это немного, но изменения происходят в нужную нам сторону. Характерная величина изменения погонной индуктивности при учете дисбаланса составила 5% при ее значениях около $2\cdot 10^{-7}$ Гн/м. Однако в случае малых значений L', характерных для каналов с обращенным токоподводом, учет дисбаланса может играть заметную роль.

Наилучший результат в значениях погонной индуктивности L' оказался равным $(2.39 \div 2.53)\cdot 10^{-7}$ Гн/м при $L_p = 2.83\cdot 10^{-7}$ Гн/м. Последняя величина получена через вычисление потока граничного магнитного поля, рассчитанного с помощью описанной вспомогательной интегро-дифференциальной модели. В расчете силы участвовал описанный дисбаланс, верхний рельс отсутствовал, а внешний кожух был отодвинут на расстояние, вдвое большее исходного. Приведенный результат свидетельствует о значительном влиянии внешнего проводящего кожуха на погонную индуктивность, как полученную из расчета ускоряющей силы, так и вычисленную через поток магнитного поля на границе области.

Заключение

Выполненная работа представляет одну из первых в России попыток создания численной трехмерной модели рельсотронного ускорителя макротел с металлическим скользящим контактом, в которой учтены как электродинамические, так и тепловые процессы до фазовых переходов включительно. В модели предусмотрен учет особенностей как конструкции канала и якоря, так и специфических эффектов электродинамики, связанных с высокой (порядка 1 км/с), скоростью перемещения и скоростью нагрева якоря. Большой объем данных был получен в предварительных численных экспериментах, моделирующих как рельсотрон с обычным каналом, так и ускоряющую систему с обратным токоподводом. При этом исследовалось распределение токов по якорю, которое вместе с другими факторами определяет момент нарушения металлической проводимости в скоростном контакте и соответствующую предельную скорость. Некоторые из полученных результатов, в частности, противоположная тенденция изменения ускоряющей силы от времени в обычном канале и в канале с обратным токоподводом, а также влияние электропроводности рельсов на ее величину, пока не нашли надлежащей физической трактовки. Тем не менее в арсенале инженеров-физиков, занимающихся данной проблемой, появился достаточно мощный инструмент, с помощью которого можно с большей эффективностью использовать экспериментальные ресурсы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. "Материалы I Всесоюзного семинара по динамике сильноточного дугового разряда в магнитном поле" (Новосибирск, 10-13 апреля 1990 г.), под ред. М.Ф. Жукова, – Новосибирск: изд. Инст. Теплофизики СО АН СССР, 1990, 350с.

2. "Материалы II Всесоюзного семинара по динамике сильноточного дугового разряда в магнитном поле" (Новосибирск, 4-6 декабря 1991г.), под ред. В.Е. Накорякова, – Новосибирск изд. Инст. Теплофизики СО РАН, 1992, 367с.
3. *В.Б. Железный, А.Д. Лебедев, А.В. Плеханов.* Воздействие на динамику ускорения якоря в РЭУ // в [2]. с.16–32.
4. *Г.А.Кнопфель.* Сверхсильные импульсные магнитные поля. – М.: Мир, 1972. 392с.
5. *В.П. Базилевский, Р.М. Заятдинов, Ю.А. Кареев.* Кризис электропроводности высокоскоростного металлического контакта // в [2]. с. 285-303.
6. *М.П. Галанин, Ю.П. Попов.* Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах. Математическое моделирование – М.: Наука, Физматлит, 1995, 320с.
7. *М.П. Галанин, В.П. Игнатко, Ю.П. Попов, С.С. Храмцовский.* Численное решение пространственно трехмерных задач электродинамического ускорения проводящих тел, препр. Инст. Прикл. Матем. им. М.В. Келдыша РАН, 1993, № 47, 36с.
8. *М.П. Галанин, В.П. Игнатко, Ю.П. Попов, С.С. Храмцовский.* Пространственно трёхмерные расчеты электродинамического ускорения проводящих макротел. ЖТФ, 1995, т.65, вып.6, с.9–20.
9. *Yu.A. Kareev, A.P. Lototsky, Yu.A. Halimullin.* Metal Projectile Acceleration in Muzzle-Fed Railgun, 6th European Symposium on EML Technolodgy (The Hague, 25-28 May 1997). Proceedings, p.314–321.
10. *И.Е. Тамм.* Основы теории электричества – М.: Наука, 1989, 504с.
11. *К.С. Демирчян, В.Л. Чечурин.* Машинные расчеты электромагнитных полей – М.: Энергоатомиздат, 1984, 168 с.
12. *О.А. Ладыженская, В.А. Солонников.* Решение некоторых нестационарных задач магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости – Труды МИАН СССР, 1960, т.59, с.115–173.
13. *Э.М. Дробышевский, В.С. Юферев, С.В. Юферев.* Расчет скин-слоя в системах длинных проводников, препр. ФТИ АН СССР, 1988, № 1305, 20с.
14. *С.В. Юферев, В.С. Юферев.* Диффузия электромагнитного поля в системах цилиндрических параллельных проводников произвольной формы при протекании коротких импульсов тока. ЖТФ, 1991, т.61, вып.11, с.23-31.
15. *В.В. Никольский, Т.И. Никольская.* Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Наука, 1989, 544с.
16. *М.П. Галанин, С.С. Храмцовский.* Решение пространственно трехмерных задач электромагнитного ускорения в системе длинных проводников, препр. Инст. Прикл. Матем. им. М.В. Келдыша РАН, 1998, № 29, 20с.
17. *А.Н. Тихонов, А.А. Самарский.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972, 735с.
18. *Б.М. Будак, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов.* Сборник задач по математической физике. – М.: Наука, 1980, 686с.
19. *А.А. Самарский, Б.Д. Моисеенко.* Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана, ЖВМ и МФ, 1965, т.5, № 5, с.816–827.
20. *A.P. Lototsky, Yu.A. Kareev, A.A. Nikolashin, Yu.A. Halimullin, E.P. Polulyah, M.P. Galanin, S.S. Khramtsovsky.* Recent Muzzle-Fed Railgun Experiment on Metal Armature for Arcless Acceleration, IEEE Trans. On Magn., 1999, in press.
21. *П.Л. Калантаров, Л.А. Цейтлин.* Расчет индуктивностей. – Лен-д: Энергоатомиздат, 1986, 488с.
22. *М.П. Галанин, А.В. Плеханов, Ю.П. Попов, С.С. Храмцовский.* О влиянии параметров внешнего проводящего кожуха на разгон тел в электродинамическом ускорителе. ЖТФ, 1996, т.66, вып.10, с.198–206.
23. *А.А. Самарский, Ю.П. Попов.* Разностные методы решения задач газовой динамики. – М.: Наука, 1980, 352с.

Поступила в редакцию 04.11.98.